第1讲 方程与方程的解

**知识梳理**

**1．列方程**

用字母*x*、*y*…等表示所要求的未知的数量，这些字母称为**未知数**．含有未知数的等式叫做**方程**．在方程中，所含的未知数又称为**元**．

为了求得未知数，在未知数和已知数之间建立一种等量关系式，就是**列方程**．

在方程中，被“+”、“-”号隔开的每一部分(包括这部分前面的“+”、“-”号在内)称为**一项**．

在一项中，数字或表示已知数的字母因数叫做未知数的**系数**．

在一项中，所含有的未知数的指数和称为这一项的**次数**．

不含未知数的项，称为**常数项**．

**2．方程的解**

如果未知数所取的某个值能使方程**左右两边**的值相等，那么这个未知数的值叫做**方程的解**．

**3．等式的性质**

**等式性质1：**等式两边同时加上(或减去)同一个数或同一个含有字母的式子，所得结果仍是等式．如果，那么．

**等式性质2：**等式两边同时乘以同一个数(或除以同一个不为零的数)，所得结果仍是等式．

如果，那么． 如果，那么．

**等式的其他性质：**

**等式性质3：**若*a*=*b*，*b*=*c*，则*a*=*c*．此性质叫做等式的传递性(也称等量代换)．

**等式性质4：**若*a*=*b*，则*b*=*a*．此性质叫做等式的对称性．

**4．利用等式的性质解简单的一元一次方程**

利用等式的性质解简单的一元一次方程一般分两步：

一是两边同时加或减同一个数或式子使一元一次方程左边是未知项，右边是常数；

二是方程左右两边同时乘未知项的系数的倒数，使未知项系数化为1，从而解出方程．

**典型解析**

**一、列方程**

**例1：**下列式子：①8-7=1+0；②；③*a*-*b*；④6*x*+*y*+*z*=0；⑤*x*+2；⑥；⑦*a*=5；⑧*x*-2>1；⑨，其中是方程的有( )．

A．3个 B．4个 C．5个 D．6个

[解析]①不是方程，因为它不含未知数；②是含未知数*x*，*y*的方程；③不是方程，因为它不是等式；④是含未知数*x*，*y*，*z*的方程；⑤不是方程，因为它不是等式；⑥是含未知数*x*，*y*的方程；⑦是含未知数*a*的方程；⑧不是方程，因为它不是等式.

[答案]B

[方法规律]判断是不是方程，必须紧扣方程的两个要素：等式、未知数，两者缺一不可.如题中③⑤⑧不是等式，①不含未知数.

**例2：**根据下列条件，列出方程：

(1)50千克含糖5%的糖水，现在要把它的浓度提高到含糖15%，需加糖千克；

(2)商店对某种商品调价，按原价的8折出售，此时商品的利润率是15%，此商品的原价为300元，商品的进价是元．

**找出其中相等的关系吧！**

解 (1)所列方程为；

(2)所列方程为．

**二、方程的解**

**例3：**检验下列各数是不是方程的解．

(1)； (2)．

分析 检验一个数是否为某个方程的解，只需要把这个数分别代入方程的左边和右边，如果左右两边的值相等，那么这个数就是方程的解，否则就不是方程的解.

解 (1)检验：把分别代入原方程的左边和右边，得左边，右边.

因为左边右边，所以不是方程的解.

(2)检验：把分别代入原方程的左边和右边，得左边，右边.

因为左边右边，所以是方程的解.

**【变式训练】**

下列说法中正确的是( )．

A．*y*=4是方程*y*+4=0的解 B．*x*=0.0001是方程200*x*=2的解

C．*t*=3是方程|*t*|-3=0的解 D．*x*=1是方程的解

[解析]A．把*y*=4代入方程左边得4+4=8，方程右边是0，故*y*=4不是方程*y*+4=0的解；B．把*x*=0.0001代入方程左边得200×0.0001=0.02，方程右边是2，故*x*=0.0001不是方程200*x*=2的解；C．把*t*=3代入方程左边得|3|-3=0，方程右边也是0，故*t*=3是方程|*t*|-3=0的解；D．把*x*=1分别代入方程左、右两边，左边得，右边得-1，故*x*=1不是方程1的解．

[答案]C

**例4：**已知2是关于*x*的方程的一个解，求2*a*-1的值．

[解析]要紧扣方程的解及整式的值的意义解题.

因为2是关于*x*的方程的一个解，所以*a*=3.因此2*a*-1=2×3-1=5.

**【变式训练】**

已知关于*x*的方程5*x*-4*k*+14=0的解与方程的解相同，求*k*的值．

[解析]可先求出的解为*x*=-2.因为方程5*x*-4*k*+14=0的解与的解相同，所以*x*=-2也是方程5*x*-4*k*+14=0的解.

[答案]由，得*x*=-2.把*x*=-2代入5*x*-4*k*+14=0，得-10-4*k*+14=0，即4*k*=4，所以*k*=1.

[点拨]能够使方程等号左右两边相等的未知数的值叫做方程的解.两个方程的解相同，即该未知数的值能够使这两个方程的左右两边分别相等.

**例5：**试写出一个方程，使它的解分别是：

(1)； (2)或．

解 (1)；

(2).

**满足条件的方程是唯一的吗？**

**【变式训练】**

试写出一个方程，使它的解为或．

答案：如

**三、等式的性质**

**例6：**用适当的数或式子填空，使结果仍为等式，并说明变形的依据．

(1)若*x*+3=4，则*x*=4+\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_； (2)若2*x*=10-3*x*，则2*x*+\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=10；

(3)若0.2*x*=0，则*x*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_； (4)若-2*x*=6，则*x*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

[解析]观察式子(1)，它的左边减去3，根据等式性质1，右边也应减去3即加上-3；(2)右边加上3*x*，根据等式性质1，故左边也应加上3*x*；(3)左边乘以5，根据等式性质2，右边也应乘以5；(4)左边除以-2，根据等式性质2，右边也应除以-2.

[答案](1)(-3)；(2)3*x*；(3)0；(4)-3

[温馨提示](1)观察等式一边由原等式作了怎样的变形，另一边也要进行完全相同的变形.(2)等式变形时，必须根据等式的性质，等式才成立，否则就破坏了相等关系.(3)等式两边都除以同一个数时，这个除数不能为零.

**例7：**根据等式的性质，下列变形是否一定成立？说明你的理由．

(1)如果，那么；

(2)如果，那么．

解 (1)一定成立.等式两边同时减去后，等式两边再同时乘以；

(2)不一定成立.这里等式的两边同时除以，但由于并未说明—定不等于零，所以这不符合等式性质，因此不成立.

运用等式性质和运算性质，可以求出方程的解.

**正确结果应该是或.**

**例8：**求出下列方程的解．

(1)； (2)； (3)．

分析 能使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做方程的解.因此，我们需要运用等式性质，最终确定未知数的值.

解 (1)等式两边减8，得，

合并同类项，得，

两边除以2，得.

所以，原方程的解为；

**如何判断所得到的结果是否正确？**

(2)等式两边减去，得，

合并同类项，得，

两边除以，得.

所以，原方程的解为；

**可以将求得的未知数的值代入原方程的左右两边，看这个值能否使原方程左右两边的值相等.**

(3)等式两边减去，得

，

去括号，得，

合并同类项，得，

两边除以，得.

所以，原方程得解为.

求方程的解的过程，叫做解方程.

**等式两边加上可以吗？然后呢？**

**同步训练**

**一、填空题**

1．分别写出下列各项的系数与次数：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 系数 |  |  |  |  |  |
| 次数 |  |  |  |  |  |

答案： 2 0.5  1 0 1 2 2 5

2．若关于的方程是一元一次方程，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：2

3．根据条件列方程：差的绝对值的比的和小2；\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

4．\_\_\_\_\_\_\_\_\_(填“是”或“不是”)方程的解．

答案：是

5．已知方程的解为，则*a*的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：3

6．若关于*x*的方程的解是，那么*m*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

7．把方程变形为时，是将方程的两边都\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：加上

8．把方程变形为时，是将方程的两边都\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：加上

**二、选择题**

9．某商店销售一批服装，每件售价150元，可获得25%利润，求这种服装的成本价．设这种服装的成本价为元，则得到方程( )．

(A) (B)

(C) (D)

答案： A

10．下列变形正确的是( )．

A．若3*x*-1=2*x*+1，则*x*=0 B．若*ac*=*bc*，则*a*=*b*

C．若*a*=*b*，则 D．若，则*y*=*x*

[解析]A中，方程两边同时减2*x*，化简，得*x*-1=1.两边再加1，可得*x*=2，故错误；B中，两边需要同时除以*c*，得*a*=*b*，但不能保证*c*不等于0，故错误；C也是错误的，因为不能保证同时除以的数*c*不为0，故只有选项D正确.

[答案]D

**三、解答题**

11．根据条件列方程：

(1)某数与的和的3倍等于21；

(2)某数的倍的相反数比某数的3倍大4；

(3)某数比它的平方小42；

(4)某数的20%减去15的差的一半等于2．

答案：(1) (2) (3) (4)

12．若是方程的解，检验是不是方程的解．

答案：不是

13．解下列方程：

(1)； (2)．

答案：(1)；(2).

**【探索创新】**

《遛马》

踢呖达，踢呖达，

赛马结束正遛马，

六十只脚地上走，

人马共有一十八，

想一想来算一算，

多少人来多少马？

若设马有只，则可列方程为：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

**第2讲 一元一次方程及其解法**

**知识梳理**

**1．一元一次方程的定义**

只含有一个未知数且未知数的次数是一次的方程叫做**一元一次方程**.

一元一次方程必须同时满足下列三个条件：

(1)含有一个未知数；(2)未知数的指数是1；(3)未知数的系数不为0.

**2．解方程**

求方程的解的过程叫做解方程.

**3．等式的性质**

(1)等式的性质1：如果*a*=*b*，那么*a*±*c*=*b*±*c*.

(2)等式的性质2：如果*a*=*b*，那么*ac*=*bc*.如果*a*=*b*(*c*≠0)，那么

**4．解一元一次方程的步骤**

(1)去分母；(2)去括号；(3)移项；(4)化成*ax*=*b*(*a*≠0)的形式；(5)两边同时除以未知数的系数，得到方程的解.

**注意：**

(1)化分母中的小数为整数时，要根据分数的基本性质，把分子、分母同时乘以一个不为0的数，不改变分数的局部的值，不涉及其他项.

(2)去分母是根据等式的基本性质，因此方程中的每一项都要同时乘以分母的最小公倍数，不能漏乘，去掉分数线之后，分子要注意添加括号.

(3)这些步骤的先后顺序并不是严格固定的，要根据问题灵活变动.

**典型解析**

**【知识点一 一元一次方程的定义】**

**例1：**以下式子：(1)；(2)3+2=5；(3)；(4)；(5)2*x*=3*x*；(6)3-4*x*；(7)；(8)其中是一元一次方程的是(1)(5)(7)\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**【变式训练】**

当*m*= -1或0 ；*n*= 1 时，方程是一元一次方程.

**【知识点二 解一元一次方程的一般方法】**

**例2：**解下列方程：

(1)； (2)；

(3).

答案：(1)；(2)；(3).

**例3：**解方程：(1)

[解析]两个方程中都含有字母，所以解两个方程时都要先去分母.由于(2)中的分母是小数，应先根据分数的基本性质把其化为整数后再去分母.

[答案](1)去分母，得(8*x*+4)-(5*x*-7)=10.

去括号，得8*x*+4-5*x*+7=10.

移项及合并同类项，得3*x*=-1.

系数化为1，得.

(2)原方程可变形为7.5.

去分母，得800-1100*x*-13=2-100*x*-15.

移项及合并同类项，得1000*x*=800.

系数化为1，得.

**【变式训练】**

依据下列解方程的过程，请在前面的横线上填写变形步骤，在后面的括号内填写变形依据，横线上填写注意事项.

解：原方程可化为. (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)

(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)，得3(3*x*+5)=2(2*x*-1).(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)注意：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

去括号，得9*x*+15=4*x*-2.(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，得9*x*-4*x*=-2-15.(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，得5*x*=-17.(代数式运算、合并同类项法则)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，得 (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)

所以， 是原方程的解.

分析：当分母中含有小数时，可以用分数的基本性质，把它们化为整数，再按照去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为1的步骤依次进行.

解：原方程可化为.(分数的基本性质)

(去分母)，得3(3*x*+5)=2(2*x*-1).(等式性质2)注意：不要漏乘

去括号，得9*x*+15=4*x*-2.(去括号法则，乘法分配律)

移项，得9*x*-4*x*=-2-15.(等式的性质1)

合并同类项法则，得5*x*=-17.(代数式运算、合并同类项法则)

系数化为1，得*x*=.(等式性质2)

**例4：**解方程：.

分析 百分数是特殊的分数，也可以用去分母的方法对方程进行变形

解 去分母，得.

去括号，得.

移项，得.

合并同类项，得.

未知数的系数化为1，得.

**例5：**(1)； (2).

解：(1)；(2).

**例6：**解方程：3{2*x*-1-[3(2*x*-1)-3]}=5.

规范解答

设*y*=2*x*-1.

则原方程可化为3[*y*-(3*y*-3)]=5.

整理得-6*y*=-4.

解得即

所以

解后反思

仔细观察，发现方程中含有未知数*x*的地方都有2*x*-1，遇到这种情况，我们可以先将2*x*-1看成一个整体，即利用换元法，设*y*=2*x*-1，求*y*=2*x*-1，求得*y*，再求*x*.

**【知识点三 用一元一次方程的解的定义解相关问题】**

**例7：**已知是方程6(2*x*+*m*)=3*m*+2的解，求关于*y*的方程*my*+2=*m*(1-2*y*)的解.

[解析]因为是方程6(2*x*+*m*)=3*m*+2的解，所以满足方程6(2*x*+*m*)=3*m*+2，代入后解关于*m*的方程，再将*m*代入方程*my*+2=*m*(1-2*y*)中，解关于*y*的方程.

[答案]将代入方程6(2*x*+*m*)=3*m*+2中，

得

6+6*m*=3*m*+2，

将代入方程*my*+2=*m*(1-2*y*)中，

得

-4*y*+6=-4(1-2*y*)，

-4*y*+6=-4+8*y*，

-12*y*=-10，

.

**拓展提升**

**一、含绝对值的一次方程**

**例8：解含有绝对值的方程：**

(1)； (2)； (3).

(1)分析：本题运用零点分段法求解，本题有两个零点，*x*=4和*x*=3

解：当

当

当

(2)解：5*x*-2=3，*x*=1

5*x*-2=-3，

(3)解：，*x*=-1

，*x*=2

**【方法提炼】**

零点分段法：

1、先令绝对值里的代数式为0，求出零点.

2、零点将数轴划分为几段.

3、讨论在每段区间内，绝对值是正是负，并去绝对值，得出最终结果.

**二、分类讨论思想**

分类讨论是方程中重要的思想方法.本章的分类讨论思想主要表现为以下两个方面：一是求方程的解，在对*ax*=*b*化简时，应根据*a*，*b*的取值讨论解的情况；二是解实际应用题时，需要对各种方案进行讨论，得出最佳方案.

**例9：**关于*x*的方程2*ax*+2=12*x*+3*b*，问：当*a*，*b*为何值时：

(1)方程有唯一解；(2)方程有无数个解；(3)方程无解.

[解析]解含字母系数的方程时，先将方程化为“*ax*=*b*”的形式，然后根据方程的解的情况进行分类讨论.

[答案]把方程2*ax*+2=12*x*+3*b*变形，得(2*a*-12)*x*=3*b*-2.

(1)当2*a*-12≠0，即*a*≠6时，方程只有一个解，其解为.

即*a*≠6，*b*为任意数时方程有唯一解.

(2)因为2*a*-12=0且3*b*-2=0时，方程有无数个解，

由2*a*-12=0，得*a*=6；

由3*b*-2=0，得.

即*a*=6且时方程有无数个解.

(3)因为2*a*-12=0且3*b*-2≠0时，方程无解，

由2*a*-12=0，得*a*=6；

由3*b*-2≠0，得

即*a*=6且时方程无解.

[规律总结]对于一元一次方程*ax*=*b*，(1)当*a*≠0时，方程有唯一解；(2)当*a*=0，*b*=0时，方程有无数个解；(3)当*a*=0，*b*≠0时，方程无解.反之，(1)当方程有唯一解时，*a*≠0；(2)当方程有无数个解时，*a*=0，*b*=0；(3)当方程无解时，*a*=0，*b*≠0.因此，我们只要把已知方程化为*ax*=*b*的形式，即可讨论*a*，*b*的取值范围.

**【变式训练】**

解关于*x*的方程.

解：(*a*-1)*x*=4

当*a*=1时，无解

当*a*≠1时，

**同步训练**

**一、填空题**

1．当\_\_\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_\_\_时，方程是一元一次方程.

答案：；3

2．由去括号得\_\_\_\_\_\_．

答案：

3．由，去分母，得\_\_\_\_\_\_．

答案：

4．当\_\_\_\_\_\_\_时，代数式与的值互为相反数.

答案：19.

5．是方程的解，那么=\_\_\_\_\_\_．

答案：

6．已知方程的解是，那么方程的解是\_\_\_\_\_\_\_.

答案：.

**二、选择题**

7．下列变形正确的是( ).

A.4*x*-5=3*x*+2变形得4*x*-3*x*=-2+5 变形得4*x*-1=3*x*+3

C.3(*x*-1)=2(*x*+3)变形得3*x*-1=2*x*+6 D.3*x*=2变形得

答案：D

8．下列解方程中正确的是( )．

(A)将去分母，得

(B)由，得

(C)去括号，得

(D)由，得

答案： C

**三、解答题**

9．解下列方程

(1)； (2).

解：(1)*x*=2；(2)

10．解下列方程：

(1)； (2)；

(3)； (4)；

(5)； (6).

答案：(1)；(2)；(3)；(4)；(5)；(6).

11．解下列方程：

(1)；

(2)；

(3).

解：(1)*x*=9；(2)；(3)*x*=1.2.

**拓展练习**

1．解下列方程

(1)|5*x*+6|=6*x*-5； (2)2|1-2|1-2*x*||+2*x*=1.

解：(1)由题意，得5*x*+6=6*x*-5或5*x*+6=-6*x*+5，

所以*x*=11或(此时6*x*-5<0，不合题意，舍去).

综上，原方程解为*x*=11.

(2)原方程可化为2|1-2|1-2*x*||=1-2*x*，可知1-2*x*≥0，即

可进一步去绝对值，得2|1-2(1-2*x*)|=1-2*x*，即2|4*x*-1|=1-2*x*，

当4*x*-1<0时，即时，方程化简为2(4*x*-1)=-1+2*x*，解得

当4*x*-1≥0时，即时，方程化简为2(4*x*-1)=1-2*x*，解得

综上，原方程的解为或

2．问当*a*、*b*满足什么条件时，方程2*x*+5-*a*=1-*bx*：

(1)有唯一解；(2)有无数解；(3)无解.

分析：先解关于*x*的方程，把*x*用*a*，*b*表示，最后再根据系数情况进行讨论.

解：将原方程移项得2*x*+*bx*=1+*a*-5，合并同类项得：(2+*b*)*x*=*a*-4

当2+*b*≠0，即*b*≠-2时，方程有唯一解

当2+*b*=0且*a*-4=0时，即*b*=-2且*a*=4时，方程有无数个解，

当2+*b*=0且*a*-4≠0时，即*b*=-2且*a*≠4时，方程无解.

**第3讲 一元一次方程的应用**

**知识梳理**

**1．运用方程解决实际问题的一般过程**

(1)审题：分析题意，找出题中的数量关系；

(2)设元：选择一个适当的未知数，用字母表示(例如*x*)；

(3)列方程：根据相等关系列出方程；

(4)解方程：求出未知数的值；

(5)检验并作答：检验求得的值是否正确和是否符合实际情形，并写出答案.

**2．设元的技巧**

(1)直接设元：即问什么设什么；

(2)间接设元：即所设的不是所求的，需要将要求的量以外的量设为未知数，便于找出符合题意的等量关系；

(3)辅助设元：把应用题中隐含的未知量设为未知数，作为桥梁来分析；

(4)整体设元：在未知数的某一部分存在一个整体关系，可设这一部分为未知量，从而减少设元个数.

**3．找未知量和已知量之间等量关系的常用方法**

(1)从关键词中找相等关系；(2)利用基本公式找相等关系；(3)利用不变量找相等关系；

(4)对于一种“量”，从不同角度进行表述形成一种相等关系.

**典型解析**

**例1：**某服装师做成一件衬衣、一条裤子、一件外套所用的时间之比为1：2：3，他用20个工时能做2件衬衣、3条裤子和4件外套，那么他做一件衬衣、一条裤子、一件外套分别需要几个小时？

**例2：**某人把若干元按三年期的定期储蓄存入银行，假设年利率为3.69%，到期支取时扣除利息税实得利息1771.2元，求存入银行的本金.(利息税为20%)

**例3：**一项工程甲做40天完成，乙做50天完成，现在先由甲做，中途甲有事离去，由乙接着做，共用46天完成，问甲乙各工作了多少天？

**拓展提升**

**例4：**若时钟的时针在4点和5点之间，且与分针所夹的角为直角，求此时的时间.

**方法提炼**

时针的速度是：360÷12÷60=0.5°/分

分针的速度是：360÷60=6°/分

**同步训练**

**一、填空题**

1．在方程中，一次项是 ，二次项系数是 .

2．关于的方程是一元一次方程，则= ，方程的解是 .

3．某班分组实验，设分组，若每组4人，则多出3人；若每组5人，则缺2人，那么可列出方程\_ \_.

4．某次数学竞赛共30题，答对一题得5分，不答得0分，答错扣1分，某学生有5题未答，最后得77分，他答对了 题.

5．关于的方程是一元一次方程，则= .

**二、选择题**

(1)有*m* 辆客车及若干个人.若每辆客车乘40人，则还有10人不能上车；若每辆客车乘43人，则只有1人不能上车.下列四个等式中正确的是( )

(A) (B)

(C) (D)

(2)甲、乙两队共有人，两队人数之比为3：2，因工作需要，从甲队调人到乙队后，两队人数相等，则下列等式中正确的是( )

(A) (B) 

(C) (D) 

(3)一个两位数的十位数字与个位数字之和是7，把这个两位数加上45后，结果恰好成为十位、个位数字对调后组成的两位数，则这个两位数是( )

(A)16 (B)25 (C)34 (D)52

(4)一个农场中鸡的只数与兔的只数之和是70，鸡兔的脚数之和是196，则鸡比兔多( )只.

(A)14 (B)16 (C)22 (D)42

**三、解答题**

1．一个三角形三条边长的比是2：4：5，最长的边比最短的边长6 cm，求三角形的周长.

2．某城举行自行车环城赛，环城一周为6km，一共要骑10圈.最快的人在开始后45分钟第一次追到最慢的人.已知最慢的人速度是最快的人速度的，求最慢的人的速度.

3．一个两位数，它的十位上的数字比个位上的数字大5，十位上的数字与个位上的数字的和等于这个两位数的，求这个两位数.

4．某书店在促销活动中，推出一种优惠卡，每张卡售价20元，凭卡购书可享受8折优惠.小明到该书店购书，结账时，他先买优惠卡，再凭卡付款，结果省了12元.那么，小明此次购书的原总价是多少元？

5．某机关有A、B、C三个部门，三个部门的公务员人数依次为84、56、60.如果按相同比例裁减人员，使这个机关仅留下公务员150人，那么C部门留下的公务员的人数是多少？

6．针对居民用水浪费现象，某市规定了三口之家每月标准用水量，不超标部分每立方米水费为1.3元，超标部分每立方米水费为2.9元.某三口之家每月用水12立方米，共付水费22元，问：该市规定三口之家每月标准用水量为多少立方米？

7．在58个学生中，有28人会跳舞，27人会打桥牌，31人会唱歌.其中既会打桥牌又会唱歌的有11人，既会跳舞又会打桥牌的有10人，既会跳舞又会唱歌的有13人，三项活动都不会的有2人，三项活动都会的有多少人？

**第4讲 不等式及不等式组**

**课前检测**

1.不等式组有解，*m*的取值范围是( ).

A.*m*>8 B.*m*≥8 C.*m*<8 D.*m*≤8

答案：C

2.下列语句正确的是( ).

A.因为所以 B.因为所以

C.因为*ax*>*ay*，所以*x*>*y* D.因为所以

答案：D

3.*a*为任意有理数，则不等式恒成立的是( ).

A.1-*a*<1 C. D.2*a*>*a*

答案：C

4.若不等式2*x*-1<10和*x*+3>6都成立，那么*x*满足( ).

A.*x*>3 B. C.3<*x*< D.*x*<3或*x*>

答案：C

5.不等式15-2*x*>7的正整数解的个数为( ).

A.3个 B.4个 C.5个 D.6个

答案：A

6.*a*取什么值时，式子3*a*+2的值分别满足：

(1)是正数？(2)是负数？(3)是0?

答案：

**知识梳理**

**1．不等式的概念**

**不等式：**用不等号“>”、“<”、“≤”或“≥”表示的关系式，叫做不等式.

**2．不等式的性质：**

**性质1：**不等式的两边同时加上(或减去)同一个数或同一个含有字母的式子，不等号的方向不变.即：如果*a*>*b*，那么*a*+*m*>*b*+*m*；如果*a*<*b*，那么*a*+*m*<*b*+*m*.

**性质2：**不等式的两边同时乘以(或除以)同一个正数，不等号的方向不变.即：

如果*a*>*b*，且*m*>0，那么*am*>*bm*(或

如果*a*<*b*，且*m*>0，那么*am*<*bm*(或

**性质3：**不等式的两边同时乘以(或除以)同一个负数，不等号的方向改变.即：

如果*a*>*b*，且*m*<0，那么*am*<*bm*(或)；

如果*a*<*b*，且*m*<0，那么*am*>*bm*(或).

**3．不等式的解集：**

(1)不等式的解：在含有未知数的不等式中，能使不等式成立的未知数的值，叫做不等式的解.

(2)不等式的解集：不等式的解的全体叫做不等式的解集.

(3)解不等式：求不等式的解集的过程叫做解不等式.

(4)在数轴上表示不等式的解集：先画数轴，再定界点，后定方向，大于向右，小于向左，含等号画实心圆，没等号画空心圆.

**4．一元一次不等式**

(1)定义：只含有一个未知数且未知数的次数是一次的不等式叫做一元一次不等式.

(2)解法：求解方法与解一元一次方程类似，根据不等式性质将不等式变形，从而得到解集.

可概括为：①去分母；②去括号；③移项；④化成*ax*>*b*(或*ax*<*b*等)的形式(其中*a*≠0)；⑤两边同除以未知数的系数，得到不等式的解集.

**5．一元一次不等式组及其解集**

(1)一元一次不等式组：由几个含有同一个未知数的一次不等式组成的不等式组，叫做一元一次不等式组.

(2)不等式组的解集：不等式组中所有不等式的解集的公共部分叫做这个不等式组的解集.

(3)解不等式组：求不等式组的解集的过程叫做解不等式组.

**6．不等式组的解法：**

(1)求出不等式组中各个不等式的解集；

(2)在数轴上表示各个不等式的解集；

(3)确定各个不等式解集的公共部分，就得到这个不等式组的解集.

**7．不等式及不等式组的应用**

(1)与方程的综合应用；(2)实际应用——一般步骤：审、设、列、解、答.

**专题讲解**

**专题1：不等式的性质**

不等式的性质是解不等式的依据，可以利用其对一些不等式进行变形，要注意变形时不等号是否发生变化.

**例1：**下列不等式变形中，一定正确的是( ).

A.若*ac*>*bc*，则*a*>*b* B.若*a*>*b*，则*am*2>*bm*2

C.若*ac*2>*bc*2，则*a*>*b* D.若*a*>0，*b*>0，且则*a*>*b*

[解析]A中，若*c*<0，则两边除以*c*，得*a*<*b*；B中，若*m*=0，则两边乘*m*2，得*am*2=*bm*2=0；C中，由*ac*2>*bc*2知*c*≠0，两边同时除以*c*2(*c*2>0)，有*a*>*b*；D可用特殊值法，设*a*=1，*b*=2代入检验即可.

[答案]C

[点评]要注意不等式中的隐含条件，如：若*ac*2>*bc*2，则*a*>*b*中，隐含着“*c*≠0”这一条件.

**例2：**已知*x*=3是关于*x*的不等式的解，求*a*的取值范围.

[解析]先根据不等式的解的定义，将*x*=3代入不等式得到解此不等式，即可求出*a*的取值范围.

[答案]因为*x*=3是关于*x*的不等式

的解，所以解得*a*<4.

故*a*的取值范围是*a*<4.

[点评]本题考查了不等式的解的定义及一元一次不等式的解法，比较简单.根据不等式的解的定义得出是解题的关键.

**专题2：一元一次不等式(组)的解法**

熟练掌握不等式的基本性质是解一元一次不等式(组)的关键，另外在确定不等式(组)的解集时还要善于借助数轴和口诀“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小无处找”准确、快速求解.

**例3：**解不等式组

[解析]分别求出不等式组中每个不等式的解集，然后求出它们的公共部分即可.

[答案]解不等式3*x*+1<2(*x*+2)，得*x*<3.

解不等式得*x*≥-1.

所以原不等式组的解集是-1≤*x*<3.

**专题3：求一元一次不等式(组)的特殊值**

在此类问题中，一般给出一个一元一次不等式(组)，然后在解集的范围内限定取值，解决的方法通常是先求出不等式(组)的解集，再由题意求出符合条件的数值.

**例4：**不等式4-3*x*≥2*x*-6的非负整数解有( ).

A.1个 B.2个 C.3个 D.4个

[解析]本题应先求出不等式的解集，再确定其中的非负整数值.不等式的解集为*x*≤2，所以非负整数解为0，1，2.故选C.

[答案]C

**例5：**解不等式组并写出它所有的整数解.

[解析]先求出两个不等式的解集，再求其公共部分，然后写出整数解即可.

[答案]

解不等式①，得*x*≥1；解不等式②得*x*<4，所以不等式组的解集是1≤*x*<4，所以不等式组的所有整数解是1，2，3.

[点评]本题主要考查了一元一次不等式组解集的求法，其简便求法是利用口诀，求不等式组解集的口诀：“同大取大，同小取小，大小小大取中间，大大小小无处找.”

**专题4：一元一次不等式组中求参数的技巧**

由已知不等式(组)的解集或整数解来确定待定系数的值或待定系数的取值范围，常用的方法是先用解不等式(组)的方法解出含待定系数的不等式(组)的解集，再代入已给出的条件中，即可求出待定系数的值.

**例6：**如果不等式组的解集是*x*<2，那么*m*的取值范围是( ).

A.*m*=2 B.*m*>2 C.*m*<2 D.*m*≥2

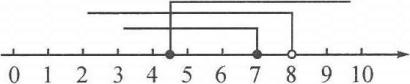
[解析]本题先解出第一个不等式，根据同小取小，不难确定答案.由2*x*-1>3(*x*-1)，得*x*<2，要使不等式组的解集是*x*<2，则*m*的取值范围为*m*≥2.故选D.

[答案]D

**例7：**已知关于*x*的不等式组的整数解共有3个，则*b*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

[解析]化简不等式组，得如图所示，将其表示在数轴上，其整数解有3个，即为*x*=5，6，7.由图可知7≤*b*<8.

[答案]7≤*b*<8



**专题5：数形结合思想**

在解有关不等式(组)问题时，有些问题需要我们借助图形来给出解答.解决此类问题时，要充分利用图形反馈的信息，或将文字信息反馈到图形上，做到由数思形，由形想数，顺利解决问题.

**例8：**关于*x*的不等式2*x*-*a*≤-1的解集如图所示，则*a*的取值是( ).

Image4

A.0 B.-3 C.-2 D.-1

[解析]由图可以看出，不等式的解集为*x*≤-1，而由不等式2*x*-*a*≤-1，解得所以解这个方程得*a*=-1.故选D.

[答案]D

**专题6：整体思想**

本章中的整体思想，就是从不等式问题的整体性质出发，突出对问题整体结构的分析和改变，方便代数式的化简与求值.

**例9：**若关于*x*，*y*的二元一次方程组的解满足*x*+*y*<2，求*a*的取值范围.

[解析]由二元一次方程组和不等式的特点，将方程组中的两个方程相加后，即可得到4(*x*+*y*)=4+*a*，因此可将*x*+*y*整体代入，从而可以应用整体思想来求*a*的取值范围.

[答案]将方程组中的两个方程相加，得4(*x*+*y*)=4+*a*，即

又因为*x*+*y*<2，所以解得*a*<4.

[点评]本题在求解时，充分运用了所给定的方程和不等式的特殊性，体现了整体思想.

**专题7：方程思想**

不等式中的方程思想，是对方程概念本质的认识，是分析数学问题中变量间的等量关系，构建方程或方程组，或利用方程的性质去分析、转换、解决问题.

**例10：**已知不等式组的解集是-1<*x*<1，求(*a*+1)(*b*-1)的值.

[解析]要求(*a*+1)(*b*-1)的值，需求出*a*和*b*的值，此时，可先解不等式组，即用字母*a*和*b*表示不等式组中的每一个不等式的解集，进而利用已知解集构造方程求出*a*和*b*，从而求解.

[答案]解不等式组中的第1个不等式，得*x*<

解不等式组中的第2个不等式，得*x*>2*b*+3，

此时，若不等式组有解，解集应为2*b*+3<*x*<.

又因为不等式组的解集是-1<*x*<1，

所以

解得*b*=-2，*a*=1.

所以(*a*+1)(*b*-1)=(1+1)×(-2-1)=-6.

[点评]根据不等式组的解集构造方程，进而求解，是解此类问题的基本思路.

**专题8：不等式(组)的实际应用**

利用不等式组解决实际问题的步骤与列一元一次不等式解应用题的步骤类似，所不同的是，前者寻求的不等关系不止一个，而后者只需找到一个不等关系即可.

在列不等式组时，审题是基础，根据不等关系列出不等式组是关键.解出不等式组的解集后，要养成检验不等式组的解集是否合理，是否符合实际情况的习惯.即审题→设一个未知数→找出题目中所有的数量关系，列出不等式组→解不等式组→检验→作答.

**例11：**筹建中的城南中学需720套单人课桌椅，光明厂承担了这项生产任务，该厂生产桌子的必须5人一组，每组每天可生产12张；生产椅子的必须4人一组，每组每天可生产24把.已知学校筹建组要求光明厂6天完成这项生产任务.

(1)光明厂平均每天要生产多少套单人课桌椅？

(2)现学校筹建组要求至少提前1天完成这项生产任务，光明厂生产课桌椅的员工增加到84名，试给出一种分配生产桌子、椅子的员工数的方案.

[答案](1)∵720÷6=120，

∴光明厂平均每天要生产120套单人课桌椅.

(2)设*x*人生产桌子，则(84-*x*)人生产椅子，则

解得60≤*x*≤60，∴*x*=60，则84-*x*=24，

∴生产桌子的60人，生产椅子的24人.

**专题2：分类讨论思想**

在利用不等式(组)解决实际问题中的方案选择、优化设计以及最大利润等问题时，为了防止漏解和便于比较，我们常常用到分类讨论思想对方案的优劣进行探讨.

**例12：**某工厂计划生产*A*，*B*两种产品共10件，其生产成本和利润如下表：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *A*种产品 | *B*种产品 |
| 成本(万元／件) | 2 | 5 |
| 利润(万元／件) | 1 | 3 |

(1)若工厂计划获利14万元，则*A*，*B*两种产品应分别生产多少件？

(2)若工厂计划投入资金不多于44万元，且获利多于14万元，则工厂有哪几种生产方案？

(3)在(2)的条件下，哪种生产方案获利最大？并求出最大利润.

[答案](1)设生产*A*种产品*x*件，则生产*B*种产品(10-*x*)件，

于是有*x*×1+(10-*x*)×3=14，解得*x*=8，

所以应生产*A*种产品8件，*B*种产品2件.

(2)设生产*A*种产品*y*件，则生产*B*种产品(10-*y*)件，

依题意有解得2≤*y*<8.

所以可以采用的方案有：

共6种方案.

(3)由题意可知，*B*产品生产越多，获利越大，所以当时可获得最大利润，最大利润为26万元.

**同步训练**

1. 已知*a*>*b*>0，则下列结论错误的是( ).

A.*a*+*m*>*b*+*m* B. C.-2*a*>-2*b* D.

[解析]∵*a*>*b*>0，∴*a*+*m*>*b*+*m*，故A选项正确；∴故B选项正确；∴-2*a*<-2*b*，故C选项错误，∴.故D选项正确.故选C.

[答案]C

[点评]本题主要考查了不等式的基本性质，熟记不等式的基本性质是解题的关键.此类题目也可以用举反例的方法排除.

**类型二：**解一元一次不等式(组)

2.不等式组的最大整数解是( ).

A.0 B.-1 C.-2 D.1

答案：C

3.已知关于*x*的不等式(2-*a*)*x*>3的解集为则*a*的取值范围是( ).

A.*a*>0 B.*a*>2 C.*a*<0 D.*a*<2

[解析]分析题中不等式的解集的特点，结合不等式的性质3，可知2-*a*<0，即*a*>2.故选B.

[答案]B

4.若不等式*ax*-2>0的解集为*x*<-2，则关于*y*的方程*ay*+2=0的解为( ).

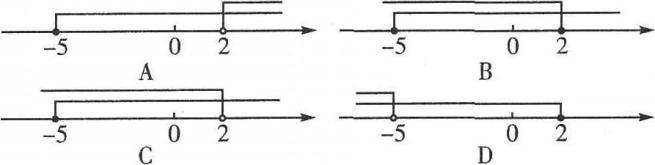
A.*y*=-1 B.*y*=1 C.*y*=-2 D.*y*=2

[解析]解*ax*-2>0，移项得*ax*>2，因为不等式的解集为*x*<-2，所以*a*=-1，则*ay*+2=0，即-*y*+2=0，解得*y*=2.故选D.

[答案]D

[点评]本题考查了不等式的解法以及一元一次方程的解法，正确确定*a*的值是关键.

5.不等式组的解集在数轴上表示为( ).



[解析]本题考查解一元一次不等式组及其解集在数轴上的表示.由不等式*x*+5≥0，解得*x*≥-5；由不等式3-*x*>1，解得*x*<2，则该不等式组的解集为-5≤*x*<2，C项符合.

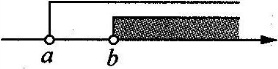
[答案]C

6.关于*x*的方程5*x*-2*m*=-4-*x*的解在2与10之间，则*m*的取值范围是( ).

A.*m*>8 B.*m*<32 C.8<*m*<32 D.*m*<8或*m*>32

答案：C

7.在数轴上表示不等式组的解集如图所示，则不等式组的解集是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.



答案：*x*<*a*

8. 不等式组的解集为\_\_\_\_\_\_\_\_.

[解析]

由①得*x*≤1，由②得*x*≥-4，

故此不等式组的解集为-4≤*x*≤1.

[答案]-4≤*x*≤1

9.不等式-1≤3-2*x*<6的所有整数解的和是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，所有整数解的积是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：2，0

10.解不等式：.

答案：

11.解一元一次不等式组并把解在数轴上表示出来.

Image5

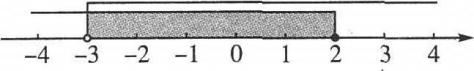
[解析]本题考查解不等式组及其解集表示.先分别求出不等式1+*x*>-2与的解集，再确定其公共部分，即可得到不等式组的解集，然后将其表示在数轴上即可.

[答案]解不等式1+*x*>-2，得*x*>-3；

解不等式得*x*≤2；

所以不等式组的解集为-3<*x*≤2.

解集在数轴上表示如图所示：



12.解不等式组并写出它的所有非负整数解.

[解析]分别求出不等式组中每个不等式的解，确定出不等式组的解集，再从解集中找出不等式组的非负整数解即可.

[答案]

由不等式①得*x*≥-2，

由不等式②得

因此，不等式组的解集为

∴非负整数解有0，1，2，3.

13.某工厂现有甲种原料360千克，乙种原料290千克，计划利用这两种原料生产*A*，*B*两种产品共50件.已知生产1件*A*种产品需甲种原料9千克、乙种原料3千克，生产1件*B*种产品需甲种原料4千克、乙种原料10千克，请提出安排生产的方案.

答案：设安排生产*A*种产品*x*件，则安排生产*B*种产品(50-*x*)件.依题意得

解得30≤*x*≤32

因为*x*为正整数，所以*x*=30，31，32，

所以有三种方案：(1)安排生产*A*种产品30件，*B*种产品20件；

(2)安排生产*A*种产品31件，*B*种产品19件；

(3)安排生产*A*种产品32件，*B*种产品18件.